

控制饱和和离散时滞线性系统的渐近稳定性

王莹莹, 许立滨, 陈东彦

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:研究了饱和控制多输入离散时滞线性系统的稳定性问题. 在满足一定的假设条件下, 针对执行器出现饱和控制的情况, 通过定义多输入饱和度函数, 基于 Lyapunov 方法给出系统全局渐近稳定的充分性判据, 并在系统不满足所给判据时给出其不变吸引域的描述. 最后, 设计一个算法来实现所得结果, 并通过数值算例验证算法的可行性与有效性.

关键词:离散时滞线性系统; 渐近稳定; 饱和控制; 饱和度函数; 不变吸引域

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0076-04

On Asymptotic Stability for Discrete-time Delay Linear Systems with Control Saturation

WANG Ying-ying, XU Li-bin, CHEN Dong-yan

(School of Application Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, the stability of multi-input discrete-time delay linear systems with control saturation is investigated. Under some assumptions, in view of the case that actuator with control saturation, a sufficient criterion based on the Lyapunov method of the global asymptotic stability of the systems is given by defining the multi-input saturation function, and the description of invariant attraction region is proposed when the presented criterion is unsatisfied. Finally, an algorithm is designed to demonstrate the presented results, and a numerical example illustrates the feasibility and efficiency of the algorithm.

Key words: discrete-time delay linear systems; asymptotic stability; control saturation; saturation function; invariant attraction region

0 引 言

饱和控制系统是十分常见的系统, 对此类问题的研究可追溯到 20 世纪 60 年代^[1]. 上个世纪 90 年代以后对受限控制系统的研究热情重又燃起, 如 1993 年 Saberi 和 Lin 用线性反馈律来半全局指数镇定饱和系统^[2], 1996 年他们又从半全局的角度研究

了饱和系统的稳定性问题^[3], 1999 年 Choi 设计了线性周期变结构控制器来镇定指数不稳定系统^[4]等. 一般地, 线性状态反馈可使一个完全能控的线性系统达到全局渐近稳定, 但饱和介入后, 系统或仍为全局渐近稳定, 或降为区域渐近稳定. 对此, 文 [5] 针对线性系统基于饱和度函数给出了系统稳定性的相关结果. 文 [6] 讨论了时滞及无时滞连续线性系统的渐近稳定性问题. 文 [7] 给出了单输入时

收稿日期: 2008-07-08

作者简介: 王莹莹 (1981—), 女, 硕士研究生, E-mail: shahenlei@126.com;

陈东彦 (1964—), 女, 博士, 教授, 博士生导师.

滞离散线性饱和系统的稳定性判据. 本文则针对多输入时滞离散线性系统的饱和控制稳定性问题进行讨论.

1 主要结果

1.1 问题叙述

考虑如下多输入离散时滞系统

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_1 x(k-h) + B \text{sat}(u(k)) \\ x(\tau) &= x_\tau, \quad -h \leq \tau \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, h 是时滞, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量, $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 皆为已知常值矩阵, 且记 $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. 记 $F = (f_1^T, f_2^T, \dots, f_m^T)^T$, 由饱和函数^[2]的定义有,

$$\text{sat}(Fx) = (\text{sat}(f_1 x), \dots, \text{sat}(f_m x))^T$$

且

$$\text{sat}(f_i x) = \text{sgn}(f_i x) \min\{|f_i x|, 1\}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

记 $L_i = \{x: -1 \leq f_i x \leq 1\}$, 则 L_i 为 $\text{sat}(f_i x)$ 的线性域.

条件 T_1 : 设计无记忆饱和控制律 $\text{sat}(u(k)) = \text{sat}(Fx(k))$, 其中, $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为待设计的反馈增益矩阵, 且 $F \neq 0$, 同时使得 $A + BF$ 是渐近稳定的.

在条件 T_1 下, 对给定的对称正定阵 P_1 , 必存在对称正定 P 使式成立.

$$(A + BF)^T P (A + BF) - P = -I - 2P_1 \quad (2)$$

1.2 状态反馈控制离散时滞线性系统的稳定性引入饱和度函数

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{|f_i x|}, & |f_i x| > 1 \\ 0, & x \in L_i \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m$$

则 $\mu_i(x) \in [0, 1]$, 且 $\text{sat}(f_i x) = (1 - \mu_i(x)) f_i x$

于是系统 (1) 可写成

$$x(k+1) = (A + \sum_{i=1}^m (1 - \mu_i(x(k))) b_i f_i) x(k) + A_1 x(k-h) \quad (3)$$

记

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & (Y_i f_i P^{-1} f_i^T)^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{(Y_i f_i P^{-1} f_i^T)^{-\frac{1}{2}}}, & (Y_i f_i P^{-1} f_i^T)^{-\frac{1}{2}} > 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中, r_i 为任意正数, P 满足式 (2), $\Omega(P, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P x < Y\}$.

为了确定 μ_i , 不妨取

$$\mu_i = \sup\{\mu_i(x) \in [0, 1]: I + \mu_i(x) M_i > 0, I + \mu_i(x) H_i > 0\} \quad (5)$$

其中,

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & P^{\frac{1}{2}} b_i f_i^T \\ (b_i f_i)^T P^{\frac{1}{2}} & E_i \end{bmatrix}, \quad E_i = (A + BF)^T P b_i f_i + (b_i f_i)^T P (A + BF), \quad (6)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & A_1^T P b_i f_i^T \\ (b_i f_i)^T P A_1 & G_i \end{bmatrix}, \quad G_i = (A + BF)^T P A_1 A_1^T P b_i f_i + (b_i f_i)^T P A_1 A_1^T P (A + BF) \quad (7)$$

由式 (5) 可解得 μ_i . 相反, 若 $\mu_i \in [0, 1]$ 是已知的, 那么可求得相应的 r_i .

定义 对于每个 $j \in N$, 选取一个正数 μ_j 与之对应, 称数组 $\{\mu_j, j \in N\}$ 是允许的, 如果它同时满足:

① 若 $j \in J$, 规定 $\mu_j = 0$;

② 若 $j \in N_1$, 规定 $\mu_j \in (0, 1)$;

③ $\sum_{j=1}^m \mu_j \min(\lambda_{\min}(M_j), \lambda_{\min}(H_j)) > -1$. 其中,

$$N = \{1, 2, \dots, m\}, \quad J = \{i \in N: \lambda_{\min}(M_i) \geq -\frac{1}{m},$$

$$\lambda_{\min}(H_i) \geq -\frac{1}{m}\}, \quad N_1 = N \setminus J.$$

所有允许的 $\{\mu_i, i \in N\}$ 的全体记为 鞅对 聊中的数组 $\{\mu_i, i \in N\}$ 的每一个元指定一个集合与之对应, 法则如下:

1) 若 $\mu_i = 0$, 知 $-1 \leq f_i x \leq 1$, 则 $x \in L_i$, 由此规定 μ_i 对应 L_i ;

2) 若 $\mu_i \in (0, 1)$, 同样有 $|f_i x| > 1$, 则 $x \in \Omega(P, Y_i) \not\subset L_i$, 规定 μ_i 对应 $\Omega(P, Y_i)$.

引理^[7] 对于给定的适维矩阵 S_1, S_2, S_3 , 不等

式 $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} < 0$ 成立当且仅当存在小参数 $\delta_1 > 0$,

$\delta_2 > 0$, 使得不等式 $S_1 + \delta_1 I < 0, S_3 + \delta_2 I < 0, S_2^T S_2 < \delta_1 \delta_2 I$ 同时成立.

定理 设系统 (1) 满足条件 T_1 , 若存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使得下面的不等式成立

$$1) \begin{bmatrix} P_1 - \delta_2 I & A_1^T P \\ P A_1 & P \end{bmatrix} > 0;$$

$$2) \begin{bmatrix} \delta_1 \delta_2 I & P A_1 \\ A_1^T P & I \end{bmatrix} > 0;$$

$$3) - P_1 + \delta_1 I < 0;$$

$$4) (A + BF)^T P A_1 A_1^T P (A + BF) - P A_1 A_1^T P < -I,$$

那么,当 $\lambda_{\min}(M_i) \geq \frac{-1}{m}, \lambda_{\min}(H_i) \geq \frac{-1}{m}, i \in N$ 时,则系统 (3) 是全局渐近稳定的;否则,存在 $N_1 \subset N$, 定义 $\Gamma_\mu = \left(\bigcap_{i \in J} L_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in N_1} \Omega(P, \gamma_i) \right)$, 则 $\Gamma^* = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}} \Gamma_\mu$ 是系统 (3) 的吸引域.

证明:选取 Lyapunov 函数为 $V(x) = x^T(k) \times P x(k) + \sum_{s=k-h}^{k-1} x^T(s) P_1 x(s)$, 其中 P 为方程 (2) 的解矩阵. 于是, $V(x)$ 沿系统 (3) 的全差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) = \\ & \{ (A + BF - \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) \times \\ & b_i f_i) x(k) + A_1 x(k-h) \}^T \times \\ & P \{ (A + BF - \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) \times \\ & b_i f_i) x(k) + A_1 x(k-h) \} - \\ & x^T(k) P x(k) + x^T(k) P_1 x(k) - \\ & x^T(k-h) P_1 x(k-h) = \\ & \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由引理, $\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} < 0$ 当且仅当存在小参数

$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使得下式成立

$$\begin{aligned} (A + BF - \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) b_i f_i)^T P (A + BF - \\ \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) b_i f_i) - P + P_1 + \delta_1 I < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_1^T P A_1 - P_1 + \delta_2 I < 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (A + BF - \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) b_i f_i)^T P A_1 A_1^T P (A + BF - \\ \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) b_i f_i) < \delta_1 \delta_2 I \end{aligned} \quad (10)$$

于是, ①当 $\lambda_{\min}(M_i) \geq \frac{-1}{m}, \lambda_{\min}(H_i) \geq \frac{-1}{m}, i \in$

N 时, 对任意的 $\mu_j \in [0, 1)$,

$$I + \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) M_i > 0 \quad (11)$$

$$I + \sum_{i=1}^m \mu_i(x(k)) H_i > 0 \quad (12)$$

由 Schur 补, 条件 2), 3), 4), 则式 (8) - (10) 成立; 条件 ① 保证 (b) 成立. 所以, 对任意的 $x(k) \in \mathbf{R}^n$, 有 $\Delta V(x(k)) < 0$, 即系统 (3) 是全局渐近稳定的; ② 若存在 $N_1 \subset N$, 当 $i \in N_1$ 时, 有 $\lambda_{\min}(M_i), \lambda_{\min}(H_i)$ 不能同时保证都大于等于 $\frac{-1}{m}$, 易证 Γ^* 是系统 (3) 的吸引域.

1.3 算法

1) 选择 $F \neq 0$ 使得 $A + BF$ 是渐近稳定的;

2) 对于给定的对称正定矩阵 P_1 , 由式 (2) 求得对称正定矩阵 P ;

3) 验证约束 (4) 是否成立. 若成立, 转到 4), 否则转到 2);

4) 寻找 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使得约束 (1), (2), (3) 成立

5) 计算 $E_i, M_i, G_i, H_i, \lambda_{\min}(M_i)$ 和 $\lambda_{\min}(H_i), i = 1, 2, \dots, m$;

6) 当 $\lambda_{\min}(M_i) \geq \frac{-1}{m}, \lambda_{\min}(H_i) \geq \frac{-1}{m}, i = 1, 2, \dots, m$ 时, 系统 (3) 是全局渐近稳定的, 否则估算其吸引域, 转到 7);

7) 确定 $J, N \setminus J$, 允许数组 $\mathcal{M}$ 并任取 $\mu \in \mathcal{M}$ 计算 L_i , 计算 $\Omega(P, \gamma_i)$;

8) 计算 $\left(\bigcap_{i \in J} L_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in N \setminus J} \Omega(P, \gamma_i) \right) = \Gamma_\mu$, 则 Γ^* 为系统的吸引域.

1.4 仿真算例

考虑由系统 (1) 描述的系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.58 & -0.43 \\ 0.55 & 1.55 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix},$$

取 $F = \begin{bmatrix} -0.5090 & -1.4503 \\ -0.5613 & -0.4326 \end{bmatrix}$, 对矩阵 $P_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 10 \end{bmatrix}$,

解 Lyapunov 方程 (2) 得 $P = \begin{bmatrix} 9.7635 & 1.6478 \\ 1.6478 & 32.5283 \end{bmatrix}$. 经验

证, 存在 $\delta_1 = 4, \delta_2 = 6$, 使得定理中的矩阵不等式均成立. 可求得它的部分吸引域为

$$\Omega = (\Omega(P, r_1) \cap \Omega(P, r_2)) \cup (\Omega(P, r_3) \cap \Omega(P, r_4))$$

其中, $r_1 = 12.1092, r_2 = 34.4769, r_3 = 12.3576, r_4 = 30.9432$

下面给出算例的仿真结果. 图 1 给出了算例在

允许控制下所对应的系统吸引域 Ω (P, 12. 109 2) $\cup$ Ω (P, 12. 357 6).

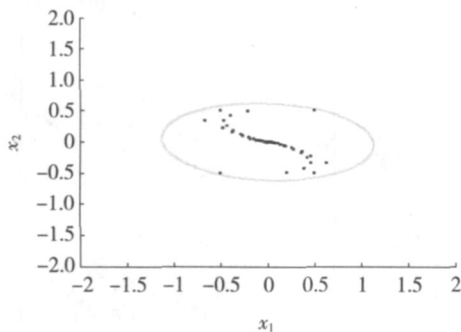


图 1 系统吸引域

2 结 语

本文研究了多输入离散时滞线性系统的稳定性,并给出了检验闭环系统是全局渐近稳定还是局部渐近稳定的判据.本文的系统是确定的,以后可以考虑不确定离散时滞线性系统.

参 考 文 献:

[1] DESOR C A, W NG J. An Optimal Strategy for Saturating Sampled

Data System [J]. RE Trans, Automat Control, 1961, 6 (1): 5 - 16

[2] L N Z, SABER I A. Semi-global Exponential Stabilization of Linear Systems Subject to "Input Saturation" via Linear Feedbacks [J]. Systems & Control Letters, 1993, 21: 225 - 239.

[3] SABER I A, L N Zong-Li TEEL R. Control of Linear Systems with Saturating Actuators [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41 (3): 368 - 378.

[4] CHO I Jinhoon. On the Stabilization of Linear Discrete-time Systems Subject to Input Saturation [J]. Systems & Control Letters, 1999, 36: 241 - 244.

[5] ZHAO Ke-you, WEI Ai-rong. On Asymptotic Stabilization of Linear Discrete-time Systems with Saturated State Feedback [J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31 (2): 301 - 304.

[6] 巫宇霞,陈东彦,张军安. 具有控制约束的连续系统的渐近稳定性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2007, 12 (4): 113 - 114.

[7] 司玉琴. 饱和系统稳定性及 L_2 性能分析 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2008: 10.

[8] 唐功友,胡乃平,赵艳东. 受扰非线性时滞系统近似最优跟踪控制 [J]. 电机与控制学报, 2008, 12 (2): 266 - 212.

(编辑:王 萍)

(上接第 75 页)

参 考 文 献:

[1] 李建强,范玉顺. 一种 workflow 模型的性能分析方法 [J]. 计算机学报, 2003, 26 (5): 513 - 522.

[2] 张志君,范玉顺. 一种高性能的分布式 workflow 系统实现框架 [J]. 计算机集成制造系统, 2003, 9 (6): 431 - 435.

[3] 史美林,杨光信,向 勇,等. WFMS: 工作流管理系统 [J]. 计算机学报, 1999, 22 (3): 325 - 334.

[4] 范玉顺. 工作流管理技术基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 35 - 40.

[5] BM. What is service-oriented Architecture (SOA) [EB/OL]. ht-

tp://www-128.ibm.com/developerworks/webservice/newto/#1.

[6] 刘 博,范玉顺. 面向服务的工作流性能评价及指标相关度分析 [J]. 计算机集成制造系统, 2008, 14 (1): 160 - 166.

[7] VOSSEN G, WESKE M. The WASA2 Object-oriented Workflow Management System [C] // Proceedings of ACM SIGMOD '99, Philadelphia, PA, USA, 1999: 587 - 589.

[8] 李红信,范玉顺. 基于 Web Service 的异构工作流管理系统的集成和互操作研究 [J]. 信息与控制, 2003, 32 (3): 193 - 197.

(编辑:温泽宇)